

Министерство образования и науки Российской Федерации

Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова

А.И. Конев, С.Я. Куранаков, А.И. Алексейцев, А.Ф. Вербиллов

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Методические указания и варианты заданий для
студентов машиностроительных специальностей

Барнаул 2003

УДК 620.174

Конев А.И., Куранаков С.Я., Алексейцев А.И., Вербилов А.Ф.
Расчет статически неопределимых систем методом сил: Методические
указания и варианты заданий для студентов машиностроительных спе-
циальностей/ АлтГТУ им. И.И.Ползунова. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ,
2003. – 22 с.

Приведены варианты расчетного задания (РЗ) для студентов
дневной и вечерней форм обучения. На примерах рассмотрен метод
сил. Даны методические указания по выполнению РЗ.

Рассмотрены и одобрены на заседании
кафедры «Прикладная механика».
Протокол № 10 от 04.07.2003 г.

1. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ. СТЕПЕНЬ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ

Изучая дисциплину «Сопротивление материалов», студент часто сталкивается с такими задачами, решить которые только с помощью уравнений статики не представляется возможным. Уравнения равновесия в условиях статического нагружения, безусловно, выполняются всегда, но в ряде случаев для определения опорных реакций и внутренних усилий этих уравнений попросту недостаточно. В этом случае возникает необходимость записывать дополнительные уравнения, смысл которых не связан с условиями равновесия.

Если уравнений статики оказывается недостаточно для определения неизвестных внутренних усилий и опорных реакций в какой-либо системе, то такая система называется статически неопределимой, а разность между числом неизвестных величин и числом возможных уравнений статики называется степенью статической неопределимости. Причем для плоской системы выражение для определения степени статической неопределимости будет иметь вид

$$n = m - 3, \quad (1)$$

а для пространственной

$$n = m - 6, \quad (2)$$

где n – степень статической неопределимости;

m – число неизвестных внутренних усилий и опорных реакций;

3 – число уравнений равновесия, возможных для плоской системы;

6 – число уравнений равновесия, возможных для пространственной системы.

Можно сказать, что в статически неопределимых системах определение внутренних усилий и опорных реакций оказывается невозможным из-за наличия как бы «лишних» связей. Например, для балки, изображенной на рис. 1, шарнирно-подвижную опору B можно считать лишней.

Действительно, глухое защемление A полностью устраняет возможность перемещения балки как жесткого целого, т.е. обеспечивает кинематическую неизменяемость заданной системы.

То минимальное число связей, при котором достигается кинематическая неизменяемость системы, называется необходимым числом связей. Для балки AB (рис. 1) это число равно трем.

Любая связь, наложенная сверх необходимого числа, оказывается для обеспечения кинематической неизменности лишней или дополнительной связью. Однако название связи лишней или дополнительной

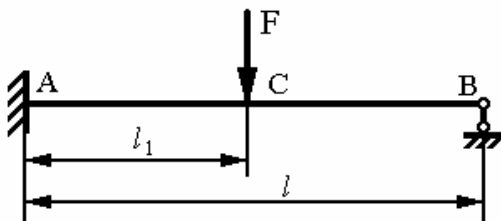


Рис. 1

не следует понимать в буквальном смысле слова, так как лишняя связь может быть избыточной, если необходимо добиться только кинематической неизменяемости системы, и эта же связь будет совсем не лишней, если стоит задача обеспечивать надлежащую прочность конструкции.

При рассмотрении статически неопределимых систем нужно иметь в виду, что дополнительные усилия возникают не только в результате внешних ограничений, но и в результате ограничений, наложенных на взаимное смещение сечений. Такие связи называют внутренними. Пример внутренней связи показан на рис. 2, а, где стержень (ригель) KL , шарнирно соединенный с вертикальными стержнями (стойками) рамы, обеспечивает равенство горизонтальных перемещений точек K и L .

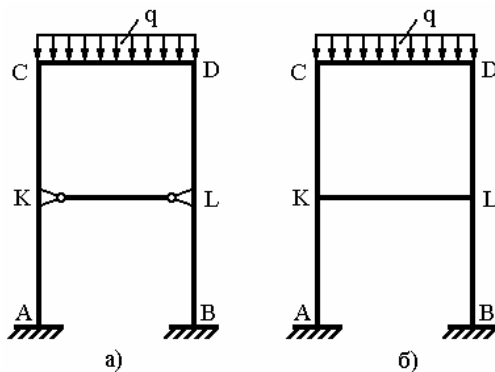


Рис. 2

Таким образом, введением стержня KL в данную раму, кроме трех внешних лишних связей, наложена еще одна внутренняя связь. Система, следовательно, четыре раза статически неопределима.

Если же шарниры убрать и соединить ригель KL со стойками AC и BD жесткими узлами (рис. 2, б), то мы получим уже не одну, а три внутренние дополнительные связи так как для определения внутренних сил в сечениях рамы контур нужно разрезать с условием, что сечения по обе стороны разреза не поворачиваются и не перемещаются относительно друг друга ни в вертикальном, ни в горизонтальном направлениях. В силу выше изложенного, рама на рис. 2, б шесть раз статически неопределима. В заключении можно сказать, что врезанный в раму шарнир, делая возможным взаимный поворот сечений относительно друг друга, снижает степень статической неопределимости на единицу, так как путем такого изменения конструкции уничтожается одна лишняя связь.

2. СУТЬ МЕТОДА СИЛ

Основная идея метода сил заключается в следующем. После того, как установлена степень статической неопределимости, заданная система мысленно освобождается от лишних связей так, что образуется статически определимая и, вместе с тем, кинематически неизменяемая система, которая называется *основной*. Мысленно отброшенные связи заменяются соответствующими силами и моментами, величина и знак которых первоначально неизвестны. Но известно условие, которое непременно должно выполняться: величины неизвестных усилий должны быть такими, чтобы в основной системе выполнились кинематические ограничения наложенными на заданную систему лишними связями.

3. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

После того, как выбрана основная система и на нее наложены все лишние неизвестные силы и моменты, необходимо записать канонические уравнения, где, независимо от того, является неизвестное силой или моментом, принято обозначать его как X_1, X_2, X_3 и т.д. Соответственно взаимные линейные или угловые перемещения обозначаются Δ_{ik} , где индекс i соответствует направлению перемещения, а индекс k – но-

меру той силы, под действием которой возникло перемещение Δ_{ik} . Например, Δ_{12} – перемещение по направлению силы 1, вызванной силой 2.

В качестве примера рассмотрим запись канонических уравнений для рамы, представленной на рис. 3.

Мысленно отбрасываем левое защемление A , вводим три неизвестные усилия X_1 , X_2 и X_3 , так как данная конструкция трижды статически неопределима. Далее запишем условия кинематической неизменяемости конструкции: так, сечение не должно, согласно видоочертанию, поворачиваться и линейно перемещаться по вертикали и горизонтали.

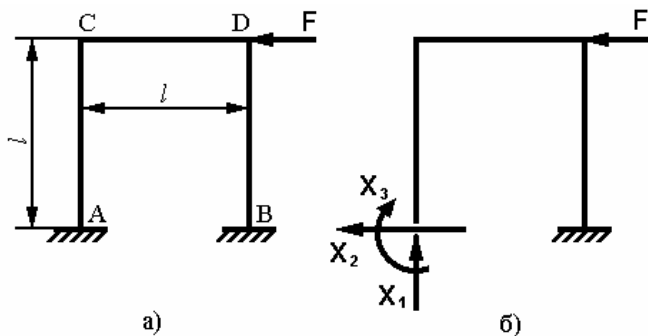


Рис. 3

Невозможность линейного смещения опорного сечения A по вертикали записываем как

$$\Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{1F} = 0, \quad (3)$$

где под Δ_{1F} понимается вертикальное смещение опорного сечения A , вызванное совокупностью всех внешних нагрузок.

Невозможность линейного смещения опорного сечения A по горизонтали

$$\Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} + \Delta_{2F} = 0. \quad (4)$$

Невозможность углового смещения опорного сечения A

$$\Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} + \Delta_{3F} = 0. \quad (5)$$

Совокупность уравнений (3), (4), (5) образуют систему канонических уравнений по методу сил, олицетворяющую условия кинематической неизменяемости.

Аналогичным образом можно записать систему канонических уравнений при любой степени статической неопределимости, причем число уравнений, входящих в систему, всегда должно быть равно сте-

пени статической неопределенности, а число слагаемых в каждом уравнении должно быть на единицу больше степени. При записи уравнений используется принцип суперпозиции или независимости действия сил. Но это допустимо лишь для линейных систем. Следовательно, перемещения Δ_{ik} пропорциональны соответствующим силам X_k и поэтому можно записать

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} \cdot X_k, \quad (6)$$

где δ_{ik} – некоторый коэффициент пропорциональности, физический смысл которого нужно понимать как перемещение по i -му направлению, вызванное действием силы X_k при условии, что ее значение равно единице. Поэтому δ_{ik} еще называют единичным коэффициентом или удельным перемещением.

В соответствии с (6) система канонических уравнений в окончательном виде может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}$ – называют главными коэффициентами;

$\delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{31}, \delta_{13}, \delta_{23}, \delta_{32}$ – побочными;

$\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \Delta_{3F}$ – грузовыми.

Система канонических уравнений (7) обладает симметрией в коэффициентах при неизвестных относительно так называемой главной диагонали, на которой располагаются главные коэффициенты $\delta_{11}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}$. Симметрия системы выражается в равенстве побочных парных коэффициентов $\delta_{12} = \delta_{21}, \delta_{32} = \delta_{23}$ и т.д. (согласно теореме о взаимности перемещений $\delta_{ik} = \delta_{ki}$).

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Все единичные коэффициенты принято находить с помощью интеграла Мора, а в том случае, когда рассматриваемая конструкция имеет прямолинейные участки с постоянной жесткостью, особенно удобно применение правила Верещагина при вычислении интеграла Мора.

При этом для балок и рам влиянием продольных и поперечных сил обычно пренебрегают и учитывают лишь изгибающие моменты. Однако, определяя перемещения в балках прямоугольного поперечного сечения, для которых отношение высоты сечения к длине пролета $h/l \geq 1/5$, поперечные силы нужно учитывать обязательно. В этом случае строятся единичные эпюры $\bar{Q}_i$ и $\bar{N}_i$ и грузовые Q_F и N_F . Сле-

дует иметь в виду, что в действительности у реальных рамных, балочных и арочных конструкций отношение h/l обычно меньше $1/10$. В этой связи при определении коэффициентов канонических уравнений целесообразно учитывать только изгибающие моменты.

Так

$$\delta_{ik} = \int_i \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dz, \quad (8)$$

где $\bar{M}_i$ и $\bar{M}_k$ - моменты единичных сил.

Грузовые коэффициенты определяются подобным образом:

$$\Delta_{iF} = \int_i \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} dz, \quad (9)$$

где M_F – изгибающий момент, вызванный системой внешних сил.

5. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ

Пример 1. Рассмотрим пример многоопорной балки, изображенной на рис. 4,

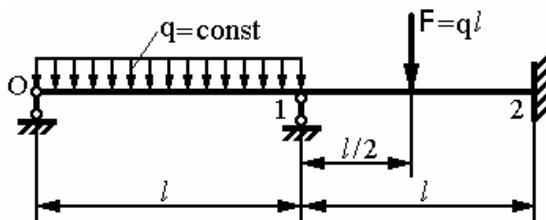


Рис. 4

Данная система дважды статически неопределима, так как число неизвестных (опорных реакций) равно пяти. Основная система может быть представлено совокупностью двух не связанных друг с другом статически определимых балок (рис. 5). Причем жесткое защемление заменено шарнирно-неподвижной опорой и неизвестным моментом X_2 , а на промежуточной опоре 1 врезан шарнир и введен неизвестный момент X_1 . В этом случае изгибающий момент X_1 определяется из условия равенства нулю взаимного угла поворота опорных сечений смежных балок, а X_2 – из условия невозможности поворота балки в опоре 2.

Условия кинематической неизменяемости конструкции возможно представить следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0,\end{aligned}\quad (10)$$

где первое уравнение описывает отрицание углов раскрытия двух бесконечно близких сечений балки, взятых на промежуточной опоре 1, а второе – отрицание угла поворота сечения балки в опоре 2.

Для того, чтобы вычислить главные, побочные и грузовые коэффициенты, нужно построить эпюры изгибающих моментов от единичных усилий, заменяющих неизвестные X_1 и X_2 , и от системы заданных сил.

Для балок 0-1 и 1-2 можно без труда построить эпюры изгибающих моментов от системы заданных сил (рис.6). Это будет грузовая эпюра M_F

Единичные эпюры строятся только от действия единичных лишних усилий $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$ (рис. 7).

Воспользовавшись правилом Верещагина, определим первый главный коэффициент δ_{11} , умножая первую единичную эпюру саму на себя

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} 2\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} 1\right) = \frac{2l}{3EI}.$$

Подобным образом определяются и остальные коэффициенты:

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= \frac{l}{3EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{6EI}; \\ \Delta_{1F} &= \frac{ql^3}{24EI} + \frac{ql^3}{16EI} = \frac{5ql^3}{48EI}; \quad \Delta_{2F} = \frac{ql^3}{16EI}.\end{aligned}$$

С учетом найденных коэффициентов система канонических уравнений примет вид

$$\begin{aligned}\frac{2l}{3EI} X_1 + \frac{l}{6EI} X_2 &= -\frac{5ql^3}{48EI}; \\ \frac{l}{6EI} X_1 + \frac{l}{3EI} X_2 &= -\frac{ql^3}{16EI},\end{aligned}\quad (11)$$

Решение системы дает: $X_1 = -\frac{ql^2}{8}$; $X_2 = -\frac{ql^2}{8}$.

Статическая неопределимость системы раскрыта.

Знак «минус» перед X_1 и X_2 говорит о том, что мы ошиблись при выборе предполагаемых направлений X_1 и X_2 . Остается построить суммарную эпюру изгибающих моментов, которая получается при сложении

нии эпюр моментов от всех заданных сил с исправленными единичными эпюрами, показанными на рис. 8.

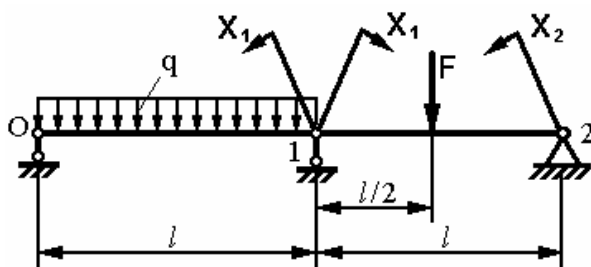


Рис. 5

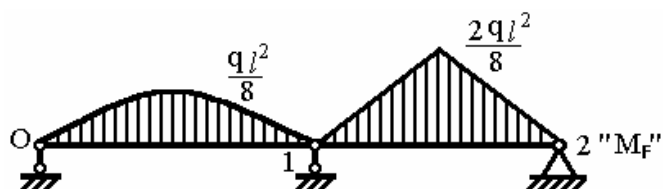


Рис. 6

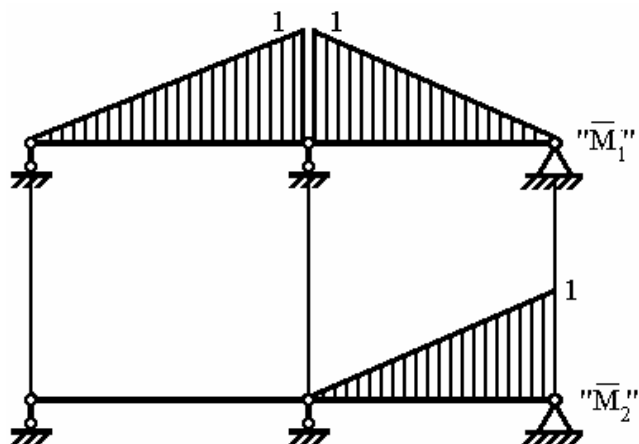


Рис. 7

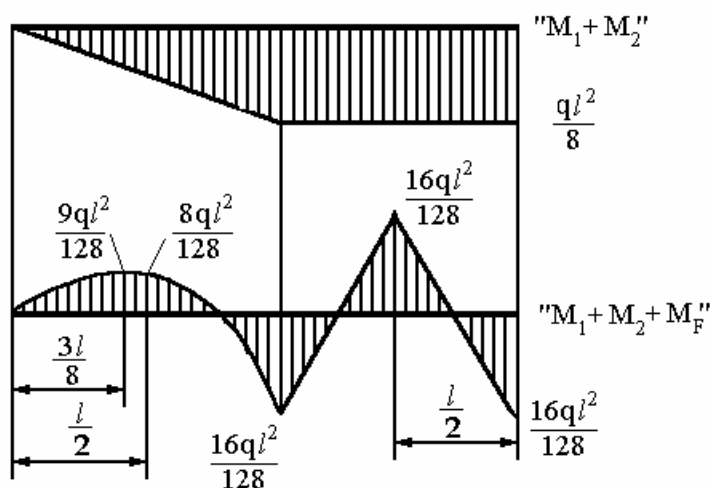


Рис. 8

Пример 2. Рассмотрим пример раскрытия статической неопределенности рамы (рис. 9).

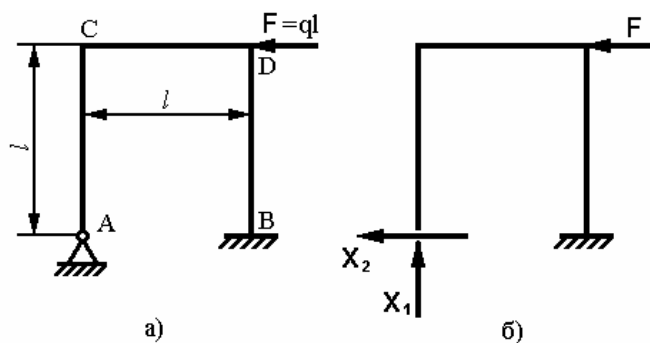


Рис. 9

Данная рама дважды статически неопределима. При выборе основной системы целесообразно отбросить опору A , добавив две силы: X_1 и X_2 . Система канонических уравнений будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0.\end{aligned}\quad (12)$$

Для нахождения главных, побочных и грузовых коэффициентов, построим эпюры моментов от единичных сил $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$, а также от заданной внешней нагрузки, представленной сосредоточенной силой $F=ql$.

Все коэффициенты, входящие в систему канонических уравнений (12), определяются так же, как и в примере 1:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} l \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot l + l \cdot 1 \cdot l \cdot 1 \cdot l \right) = \frac{4l^3}{3EI}; \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{5l^3}{EI}; \quad \delta_{22} = \frac{5l^3}{3EI}; \\ \Delta_{1F} &= -\frac{Fl^3}{2EI}; \quad \Delta_{2F} = -\frac{Fl^3}{6EI}.\end{aligned}$$

Система канонических уравнений примет вид

$$\begin{aligned}\frac{4l^3}{3EI} X_1 + \frac{l^3}{EI} X_2 &= \frac{Fl^3}{2EI}; \\ \frac{l^3}{EI} X_1 + \frac{5l^3}{3EI} X_2 &= \frac{Fl^3}{6EI},\end{aligned}$$

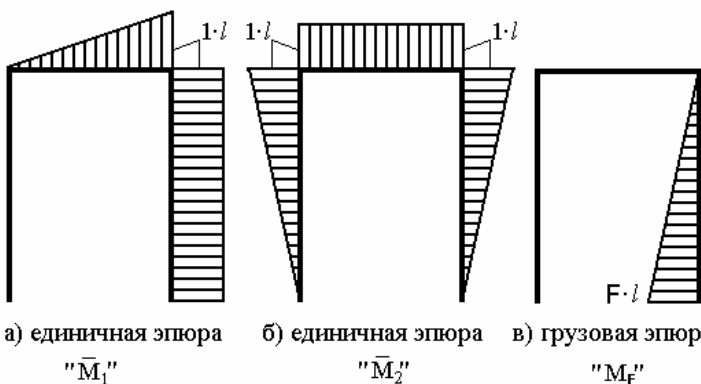


Рис. 10

или

$$8X_1 + 6X_2 = 3F;$$

$$6X_1 + 10X_2 = F,$$

откуда легко находятся X_1 и X_2 :

$$X_1 = \frac{12F}{22}; \quad X_2 = -\frac{5F}{22}.$$

Знак «минус» при неизвестном X_2 говорит о том, что направление действия X_2 было неверно предположено и что сила X_2 будет направлена не справа налево, а наоборот.

Найденные значения X_1 и X_2 позволяют перейти к построению суммарной эпюры изгибающих моментов, выполнять которое рекомендуется путем алгебраического сложения ординат эпюр моментов заданных сил, умноженных соответственно на конкретные значения X_1 и X_2 , т.е.

$$M_{\Sigma} = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2. \quad (13)$$

Для рамы $ABCD$ суммарная эпюра показана на рис. 11

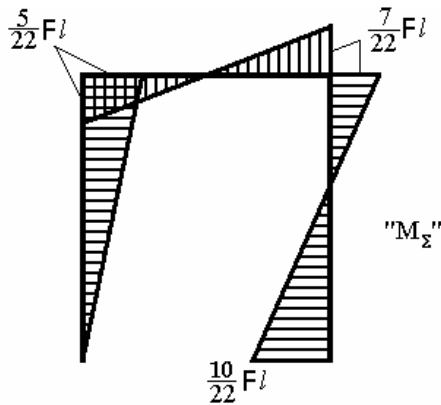


Рис. 11

6. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Рассмотренные выше примеры позволяют установить общую закономерность, суть которой представлена в следующем виде.

1. Выбирается основная статически определимая система путем отбрасывания в заданной системе лишних связей.

2. Действие отброшенных связей компенсируется приложением к основной системе неизвестных сил.

3. Составляются канонические уравнения, которые показывают, что полные перемещения в основной системе, возникающие по направлениям лишних связей под действием этих усилий и совокупности внешней нагрузки, равны нулю.

4. Основная система поочередно загружается единичными усилиями и от каждого из них, строятся единичные эпюры изгибающих моментов.

5. От совокупности внешней нагрузки строится грузовая эпюра изгибающих моментов.

6. Путем перемножения единичных эпюр между собой вычисляют все главные и побочные коэффициенты канонических уравнений.

7. Путем перемножения единичных и грузовых эпюр определяются грузовые коэффициенты системы канонических уравнений.

8. Решается система канонических уравнений и находятся значения неизвестных лишних связей.

9. Строится суммарная эпюра изгибающих моментов. Есть два способа.

10. Первый – ординаты каждой из единичных эпюр умножаются с учетом знака на найденное значение соответствующего неизвестного и все результаты суммируются с добавлением к ним ординат грузовой эпюры моментов.

11. Второй – к основной системе прикладывается вся внешняя нагрузка и найденные неизвестные усилия, а затем от их совместного действия строится суммарная эпюра изгибающих моментов.

12. Выполняется статическая проверка путем составления для основной системы уравнений равновесия – статики.

13. Выполняется деформационная проверка, суть которой заключается в нахождении перемещения точки приложения лишней связи по направлению действия данной лишней связи. Согласно вида закрепления и условий кинематической неизменяемости конструкции подобное перемещение должно быть равно нулю. Для выполнения этой проверки достаточно перемножить любую единичную эпюру изгибающих моментов на суммарную эпюру изгибающих моментов.

7. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Исходя из условия прочности при $[\sigma] = 160$ МПа, подобрать для

- балки двутавровый профиль;
- рамы швеллер.

Таблица 1

Числовые данные										
№ вар.	F, кН	M, кНм	q, кН/м	a, м		№ вар.	F, кН	M, кНм	q, кН/м	a, м
1	10	15	10	2		16	10	15	10	2
2	15	20	20	1		17	15	20	20	1
3	20	25	10	2		18	20	25	10	2
4	25	10	20	1		19	25	10	20	1
5	10	15	10	2		20	10	15	10	2
6	15	20	20	1		21	15	20	20	1
7	20	25	10	2		22	20	25	10	2
8	25	10	20	1		23	25	10	20	1
9	10	15	10	2		24	10	15	10	2
10	15	20	20	1		25	15	20	20	1
11	20	25	10	2		26	20	25	10	2
12	25	10	20	1		27	25	10	20	1
13	10	15	10	2		28	10	15	10	2
14	15	20	20	1		29	15	20	20	1
15	20	25	10	2		30	20	25	10	2

